Resolución de problemas

69. Indique un procedimiento general para resolver una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

70. Indique un procedimiento general para resolver una ecuación de la forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$.

71. Indique un procedimiento general para resolver una ecuación de la forma $ax^{-2} + bx^{-1} + c = 0$.

72. Indique un procedimiento general para resolver una ecuación de la forma $a(x - r)^2 + b(x - r) - c = 0$.

73. Escriba una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ que tenga como soluciones ± 2 y ± 1. Explique cómo obtuvo su respuesta.

74. Escriba una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ que tenga como soluciones ± 3 y $\pm 2i$. Explique cómo obtuvo su respuesta.

75. Escriba una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ que tenga como soluciones $\pm\sqrt{2}$ y $\pm\sqrt{5}$. Explique cómo obtuvo su respuesta.

76. Escriba una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ que tenga como soluciones $\pm 2i$ y $\pm 5i$. Explique cómo obtuvo su respuesta.

77. ¿Es posible que una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ tenga exactamente una solución imaginaria? Explique.

78. ¿Es posible que una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ tenga exactamente una solución real? Explique.

79. Resuelva la ecuación $\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{3}{x} = 60$.

    a) multiplicando ambos lados por el MCD.

    b) escribiendo la ecuación con exponentes negativos.

80. Resuelva la ecuación $1 = \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2}$.

    a) multiplicando ambos lados por el MCD.

    b) escribiendo la ecuación con exponentes negativos.

Determine todas las soluciones reales de cada ecuación.

81. $15(r + 2) + 22 = -\dfrac{8}{r + 2}$

82. $2(p + 3) + 5 = \dfrac{3}{p + 3}$

83. $4 - (x - 1)^{-1} = 3(x - 1)^{-2}$

84. $3(x - 4)^{-2} = 16(x - 4)^{-1} + 12$

85. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

86. $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$

87. $(x^2 + 2x - 2)^2 - 7(x^2 + 2x - 2) + 6 = 0$

88. $(x^2 + 3x - 2)^2 - 10(x^2 + 3x - 2) + 16 = 0$

Determine todas las soluciones de cada ecuación.

89. $2n^4 - 6n^2 - 3 = 0$

90. $3x^4 + 8x^2 - 1 = 0$

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] 91. Evalúe $\dfrac{4}{5} - \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{3}\right)$.

[2.1] 92. Resuelva $3(x + 2) - 2(3x + 3) = -3$

[3.2] 93. Establezca el dominio y el rango de $y = (x - 3)^2$.

[7.3] 94. Simplifique $\sqrt[3]{16x^3y^6}$.

[7.4] 95. Sume $\sqrt{75} + \sqrt{48}$.

8.5 Graficación de funciones cuadráticas

1. Determinar cuándo una parábola abre hacia arriba o hacia abajo.
2. Determinar el eje de simetría, el vértice y las intersecciones del eje x de una parábola.
3. Graficar funciones cuadráticas por medio del eje de simetría, el vértice y las intersecciones.
4. Resolver problemas de máximos y mínimos.
5. Entender el desplazamiento de las parábolas.
6. Escribir funciones en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

En la sección 3.2 graficamos ecuaciones cuadráticas por medio del trazado de puntos, y en la sección 5.8 hicimos un breve análisis de las intersecciones del eje x de las funciones cuadráticas. En esta sección estudiaremos con mayor profundidad las gráficas de funciones cuadráticas, denominadas **parábolas**. En la parte 3 se explica cómo graficar funciones cuadráticas usando el eje de simetría, el vértice y las intersecciones. En la parte 5 estudiaremos patrones en las gráficas de las parábolas, y utilizaremos dichos patrones para determinar traslaciones, o desplazamientos, que puedan usarse para graficar parábolas.

1 Determinar cuándo una parábola abre hacia arriba o hacia abajo

Las parábolas tienen una forma parecida a la de la letra U, pero su abertura puede estar hacia arriba o hacia abajo. Para una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, el *signo* del coeficiente principal, a, determina si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo. *Cuando $a > 0$, la parábola abre hacia arriba* (vea la **figura 8.7a**). *Cuando $a < 0$, la parábola abre hacia abajo* (vea la **figura 8.7b**).

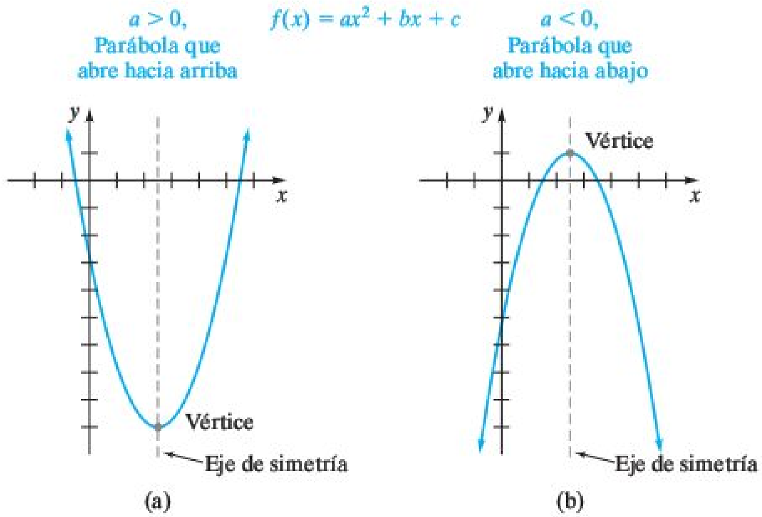


FIGURA 8.7

En el caso de las parábolas que abren hacia arriba, el **vértice** es el punto más bajo de la curva. El valor mínimo de la función es la coordenada y del vértice. El valor mínimo se obtiene cuando la coordenada x del vértice se sustituye en la función. En cuanto a las parábolas que abren hacia abajo, el vértice es el punto más alto de la curva. El valor máximo de la función es la coordenada y del vértice. El valor máximo se obtiene cuando la coordenada x del vértice se sustituye en la función.

2 Determinar el eje de simetría, el vértice y las intersecciones del eje x de una parábola

Las gráficas de funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, tendrán **simetría** respecto de una recta vertical que pasa por el vértice. Esto significa que si dobláramos el papel a lo largo de esta línea imaginaria, denominada **eje de simetría**, los dos lados de la parábola coincidirán (vea la **figura 8.7**). A continuación se establece la ecuación para determinar el eje de simetría.

Para determinar el eje de simetría

Para una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, la ecuación para determinar el **eje de simetría** de la parábola es

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Ahora deduciremos la fórmula para encontrar el eje de simetría, y determinaremos las coordenadas del vértice de la parábola; comencemos con una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ y completemos el cuadrado con los primeros dos términos.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \quad \text{Factorizar } a.$$

Un medio del coeficiente de x es $\frac{b}{2a}$, y su cuadrado es $\frac{b^2}{4a^2}$. Sumemos y restemos este término dentro del paréntesis; el resultado es cero.

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

Ahora reescribimos la función de la manera siguiente.

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b^2}{4a^2}\right)\right] - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$ *Reemplazar el trinomio con el cuadrado de un binomio.*

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$ *Escribir fracciones con un denominador común.*

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$ *Combinar los dos últimos términos; escribir primero con la variable a.*

$$= a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

La expresión $\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2$ siempre será mayor o igual a cero, ¿por qué? Si $a > 0$, la parábola abrirá hacia arriba y tendrá un valor mínimo. Como $\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2$ tendrá un valor mínimo cuando $x = -\frac{b}{2a}$, el valor mínimo de la gráfica se presentará cuando $x = -\frac{b}{2a}$. Si $a < 0$, la parábola abrirá hacia abajo y tendrá un valor máximo; éste se presentará cuando $x = -\frac{b}{2a}$. Para determinar el punto más bajo o el más alto de una parábola, sustituimos x por $-\frac{b}{2a}$ en la función, a fin de conocer el valor de y. El par ordenado resultante será el vértice de la parábola. Como el eje de simetría es la recta vertical que pasa por el vértice de la parábola, su ecuación se determina mediante la coordenada x del par ordenado. Así, la ecuación para determinar el eje de simetría es $x = -\frac{b}{2a}$. Observe que cuando $x = -\frac{b}{2a}$, el valor de $f(x)$ es $\frac{4ac - b^2}{4a}$. ¿Puede explicar por qué?

Para determinar el vértice de una parábola

La parábola representada por la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tendrá como eje de simetría $x = -\frac{b}{2a}$ y como vértice

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

Ya que con frecuencia determinamos la coordenada y del vértice sustituyendo la coordenada x del vértice en $f(x)$, el vértice también puede designarse como

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

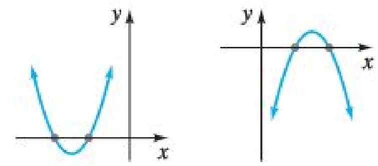
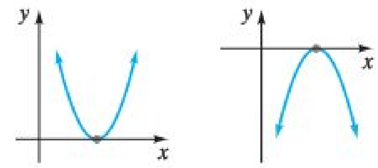
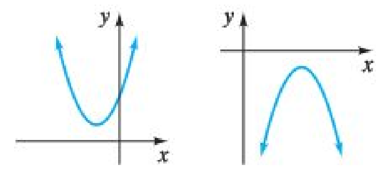
La parábola dada mediante la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ abrirá hacia arriba cuando a sea mayor que 0, y hacia abajo cuando a sea menor que 0.

Recuerde que para determinar la intersección del eje x de la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$, hacemos $f(x) = 0$ y resolvemos la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Esta ecuación puede resolverse por factorización, mediante la fórmula cuadrática o completando el cuadrado.

Como se mencionó en la sección 8.2, el discriminante, $b^2 - 4ac$, puede usarse para determinar el *número de intersecciones con el eje x*. La tabla siguiente resume la información acerca del discriminante.

Discriminante $b^2 - 4ac$	**Número de intersecciones de** x	**Posibles gráficas de** $f(x) = ax^2 + bx + c$
> 0	Dos	
$= 0$	Una	
< 0	Ninguna	

3 Graficar funciones cuadráticas por medio del eje de simetría, el vértice y las intersecciones

En esta parte trazaremos gráficas de funciones cuadráticas.

EJEMPLO 1 ▸ Examine la ecuación $y = -x^2 + 8x - 12$.

a) Determine si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.
b) Determine la intersección del eje y.
c) Determine el vértice.
d) Determine las intersecciones del eje x, si las hay.
e) Trace la gráfica.

Solución

a) Como a es -1, es decir, menor que 0, la parábola abre hacia abajo.

b) Para determinar la intersección del eje y, hacemos $x = 0$ y despejamos y.

$$y = -(0)^2 + 8(0) - 12 = -12$$

La intersección del eje y se da en el punto $(0, -12)$.

c) Primero determinamos la coordenada x y luego la coordenada y del vértice.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2(-1)} = 4$$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(-12) - 8^2}{4(-1)} = \frac{48 - 64}{-4} = 4$$

El vértice está en $(4, 4)$. La coordenada y del vértice podría haberse obtenido también sustituyendo x por 4 en la función, y determinando el valor de y correspondiente, que es 4.

d) Para determinar las intersecciones del eje x, hacemos $y = 0$.

$$0 = -x^2 + 8x - 12$$
$$\text{o} \quad x^2 - 8x + 12 = 0$$
$$(x - 6)(x - 2) = 0$$
$$x - 6 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$
$$x = 6 \quad \text{o} \quad x = 2$$

Así, las intersecciones del eje x se dan en $(2, 0)$ y $(6, 0)$. Estos valores también podrían determinarse por medio de la fórmula cuadrática (o completando el cuadrado).

e) Utilice toda esta información para trazar la gráfica (**figura 8.8**).

▸ Ahora resuelva el ejercicio 15

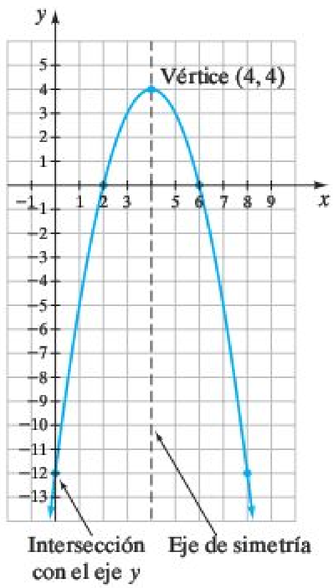


FIGURA 8.8

Observe que en el ejemplo 1, la ecuación es $y = -x^2 + 8x - 12$ y la intersección con el eje y es $(0, -12)$. En general, para cualquier ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$, la intersección con el eje y será $(0, c)$.

Si al determinar las intersecciones del eje x, mediante la fórmula cuadrática, obtiene valores irracionales utilice su calculadora para estimar estos valores, y luego trace los valores decimales. Por ejemplo, si obtiene $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$, evaluaría $\dfrac{2 + \sqrt{10}}{2}$ y $\dfrac{2 - \sqrt{10}}{2}$ en su calculadora para obtener 2.58 y -0.58, respectivamente (resultados redondeados al centésimo más cercano). Por lo tanto, las intersecciones del eje x se darían en $(2.58, 0)$ y $(-0.58, 0)$.

EJEMPLO 2 ▸ Examine la función $f(x) = 2x^2 + 6x + 5$.

a) Determine si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.

b) Determine la intersección del eje y.

c) Determine el vértice.

d) Determine las intersecciones del eje x, si las hay.

e) Trace la gráfica.

Solución

a) Como a es 2, es decir, mayor que 0, la parábola abre hacia arriba.

b) Ya que $f(x)$ es lo mismo que y, para determinar la intersección del eje y hacemos $x = 0$ y despejamos $f(x)$ o y.

$$f(0) = 2(0)^2 + 6(0) + 5 = 5$$

La intersección del eje y se da en $(0, 5)$.

c)
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(2)} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(2)(5) - 6^2}{4(2)} = \frac{40 - 36}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

El vértice está en $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. La coordenada y del vértice también puede determinarse evaluando $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$.

d) Para determinar las intersecciones del eje x, establecemos $f(x) = 0$.

$$0 = 2x^2 + 6x + 5$$

Este trinomio no puede factorizarse. Para determinar si esta ecuación tiene alguna solución real, evaluamos el discriminante.

$$b^2 - 4ac = 6^2 - 4(2)(5) = 36 - 40 = -4$$

Como el discriminante es menor que 0, esta ecuación no tiene soluciones reales. Esta respuesta era de suponerse, ya que la coordenada y del vértice es un número positivo y, por lo tanto, se ubica por arriba del eje x; ya que la parábola abre hacia arriba, no puede intersectar al eje x.

e) La gráfica se muestra en la **figura 8.9**.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 39

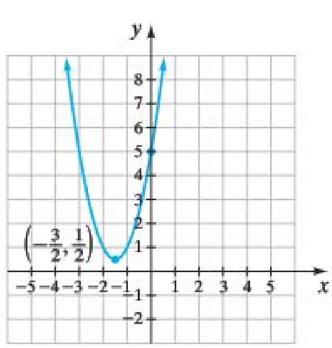


FIGURA 8.9

4 Resolver problemas de máximos y mínimos

Como se ilustra en la **figura 8.10a**, una parábola que abre hacia arriba tiene un **valor mínimo** en su vértice. Por otra parte, como se muestra en la **figura 8.10b**, una parábola que abre hacia abajo tiene un **valor máximo** en su vértice. Si le dan una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, debe saber que el valor máximo o mínimo estará en $-\dfrac{b}{2a}$, y será $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$. Existen muchos problemas de la vida real en los que se requiere determinar los valores máximo o mínimo.

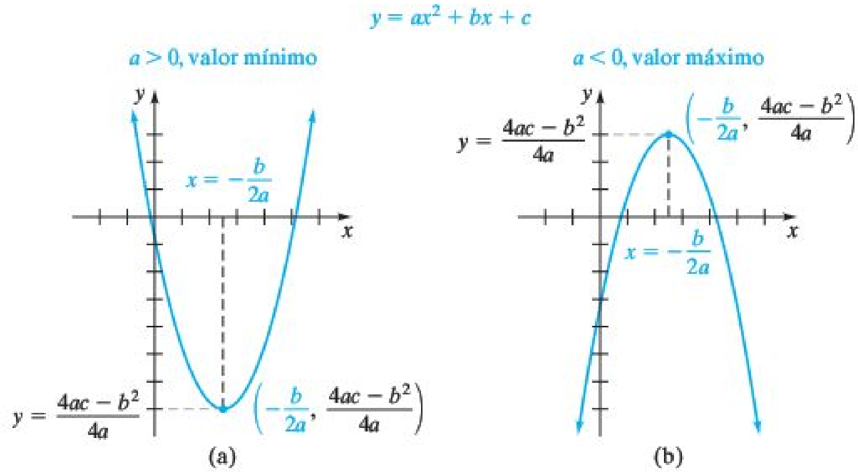


FIGURA 8.10

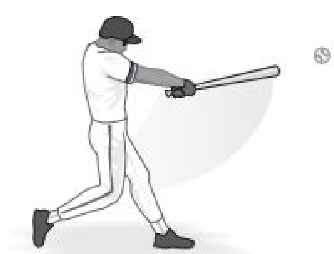


FIGURA 8.11

EJEMPLO 3 ▸ **Béisbol** Tommy Magee juega béisbol con los Cardenales de Yorktown. Durante la séptima entrada en un partido contra los Azulejos de Arlington, Magee batea de hit hacia el jardín (vea la **figura 8.11**); el contacto entre su bate y la bola se da a 3 pies del suelo. Para este hit en particular, la altura de la bola respecto del suelo, $f(t)$, en pies, en el instante t, en segundos, puede calcularse mediante la fórmula

$$f(t) = -16t^2 + 52t + 3$$

a) Determine la altura máxima que alcanza la bola de béisbol.

b) Determine el tiempo que tarda la bola en alcanzar su máxima altura.

c) Determine el tiempo que tarda la bola en chocar contra el suelo.

Solución **a)** Entienda el problema La bola de béisbol sigue la trayectoria de una parábola que abre hacia abajo ($a < 0$); a consecuencia de la gravedad, la bola se eleva hasta una altura máxima para luego caer hacia el suelo. Para determinar la altura máxima que alcanza la bola, usamos la fórmula $y = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

Traduzca $\qquad a = -16, \quad b = 52, \quad c = 3$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Realice los cálculos

$$= \frac{4(-16)(3) - (52)^2}{4(-16)}$$

$$= \frac{-192 - 2704}{-64}$$

$$= \frac{-2896}{-64}$$

$$= 45.25$$

Responda La bola de béisbol alcanza una altura máxima de 45.25 pies.

b) La bola de béisbol llega a su altura máxima en

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{52}{2(-16)} = -\frac{52}{-32} = \frac{13}{8} \quad \text{o} \quad 1\frac{5}{8} \quad \text{o} \quad 1.625 \text{ segundos}$$

c) Entienda el problema y traduzca Cuando la bola de béisbol choca contra el suelo, su altura, y, respecto de éste es 0. Por lo tanto, para determinar cuándo golpea el suelo, resolvemos la ecuación

$$-16t^2 + 52t + 3 = 0$$

Usaremos la fórmula cuadrática para resolverla.

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Realice los cálculos

$$= \frac{-52 \pm \sqrt{(52)^2 - 4(-16)(3)}}{2(-16)}$$

$$= \frac{-52 \pm \sqrt{2704 + 192}}{-32}$$

$$= \frac{-52 \pm \sqrt{2896}}{-32}$$

$$\approx \frac{-52 \pm 53.81}{-32}$$

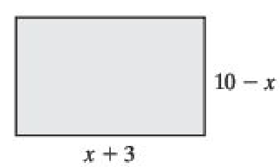
$$t \approx \frac{-52 + 53.81}{-32} \qquad \text{o} \qquad t \approx \frac{-52 - 53.81}{-32}$$

$$\approx -0.06 \text{ segundos} \qquad\qquad \approx 3.31 \text{ segundos}$$

Responda El único valor aceptable es 3.31 segundos. La bola de béisbol choca contra el suelo después de aproximadamente 3.31 segundos. Observe que en la parte **b)** el tiempo que tarda la bola en alcanzar su altura máxima, 1.625, no es exactamente la mitad del tiempo total que está en el aire, 3.31 segundos. La razón es que fue golpeada a una altura de 3 pies, y no al nivel del suelo.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 95

EJEMPLO 4 ▸ **Área de un rectángulo** Considere el rectángulo siguiente, cuya longitud es $x + 3$ y cuyo ancho es $10 - x$



a) Determine una ecuación para calcular el área, $A(x)$.

b) Determine el valor de x que proporciona el área (máxima) más grande.

c) Determine el área máxima.

Solución **a)** El área se obtiene al multiplicar la longitud por el ancho. La función para el área es

$$A(x) = (x + 3)(10 - x)$$
$$= -x^2 + 7x + 30$$

b) Entienda el problema y traduzca La gráfica de la función es una parábola que abre hacia abajo. Así, el valor máximo se alcanza en el vértice. Por lo tanto, el área máxima se da en $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Realice los cálculos $\quad x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{7}{2(-1)} = \dfrac{7}{2} = 3.5$

Responda El área máxima se alcanza cuando x es 3.5 unidades.

c) Para determinar el área máxima, sustituimos cada x de la ecuación que se obtuvo en la parte **a)** por 3.5.

$$\begin{aligned} A(x) &= -x^2 + 7x + 30 \\ A(3.5) &= -(3.5)^2 + 7(3.5) + 30 \\ &= -12.25 + 24.5 + 30 \\ &= 42.25 \end{aligned}$$

Observe que para este rectángulo la longitud es $x + 3 = 3.5 + 3 = 6.5$ unidades, y el ancho es $10 - x = 10 - 3.5 = 6.5$ unidades. En realidad el rectángulo es un cuadrado, y su área es $(6.5)(6.5) = 42.25$ unidades cuadradas. Por consiguiente, el área máxima es 42.25 unidades cuadradas.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 73

En el ejemplo **4c)**, el área máxima pudo haberse determinado también utilizando la fórmula $y = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$. Determine el área máxima utilizando dicha fórmula. La respuesta debe ser la misma que se mencionó antes, 42.25 unidades cuadradas.

EJEMPLO 5 ▸ Corral rectangular John W. Brown construye un corral rectangular para unos terneros recién nacidos (vea la **figura 8.12**). Si planea utilizar 160 metros de cerca, determine las dimensiones del corral con la mayor área.

FIGURA 8.12

Solución **Entienda el problema** Se nos ha informado cuál es el perímetro del corral, 160 metros. La fórmula para determinar el perímetro de un rectángulo es $P = 2l + 2w$, así que, en este problema, $160 = 2l + 2w$. Nos piden maximizar el área, A, donde

$$A = lw$$

Necesitamos expresar el área en términos de una variable, no de dos. Para hacerlo en términos de l, despejamos w en la fórmula del perímetro, $160 = 2l + 2w$, y luego hacemos una sustitución.

Traduzca

$$\begin{aligned} 160 &= 2l + 2w \\ 160 - 2l &= 2w \\ 80 - l &= w \end{aligned}$$

Realice los cálculos Ahora sustituimos $80 - l$ por w en $A = lw$. Esto da

$$\begin{aligned} A &= lw \\ A &= l(80 - l) \\ A &= -l^2 + 80l \end{aligned}$$

En esta ecuación cuadrática, $a = -1$, $b = 80$ y $c = 0$. El área máxima se obtendrá cuando

$$l = -\frac{b}{2a} = -\frac{80}{2(-1)} = 40$$

Responda La longitud que dará el área máxima es 40 metros. El ancho, $w = 80 - l$, también será igual a 40 metros. Por lo tanto, un cuadrado con dimensiones de 40 por 40 metros dará el área máxima.

El área máxima también puede determinarse sustituyendo $l = 40$ en la fórmula $A = l(80 - l)$, o mediante $A = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$. En cualquier caso, la respuesta es 1600 metros cuadrados.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 93

Cuando obtuvimos la ecuación $A = -l^2 + 80l$ en el ejemplo 5, podríamos haber completado el cuadrado como sigue:

$$\begin{aligned} A &= -(l^2 - 80l) \\ &= -(l^2 - 80l + 1600 - 1600) \\ &= -(l^2 - 80l + 1600) + 1600 \\ &= -(l - 40)^2 + 1600 \end{aligned}$$

Con base en esta ecuación, podemos determinar que el área máxima, 1600 metros cuadrados, se alcanza cuando la longitud es de 40 metros.

5 Entender el desplazamiento de las parábolas

Ahora veremos otro método para graficar parábolas. En él, se comienza con una gráfica de la forma $f(x) = ax^2$, y ésta se **desplaza**, o traslada para obtener la gráfica de la función que se está buscando. Como referencia, la **figura 8.13a** muestra las gráficas de $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$ y $h(x) = \frac{1}{2}x^2$. La **figura 8.13b** muestra las gráfica de $f(x) = -x^2$, $g(x) = -2x^2$ y $h(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

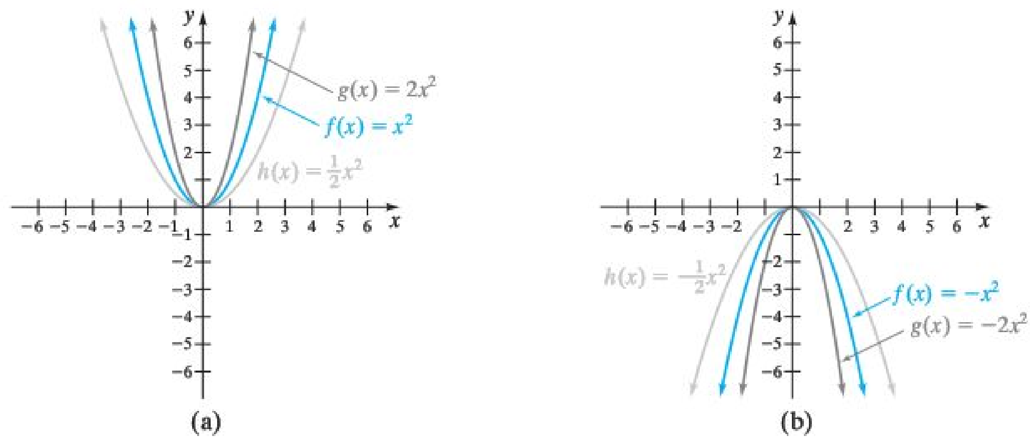


FIGURA 8.13

Trazando los puntos, usted puede verificar que cada una de las gráficas es correcta. Observe que en las **figuras 8.13a** y **b** el *valor de a* en $f(x) = ax^2$ determina el ancho de la parábola. Conforme $|a|$ aumenta, la parábola se hace más angosta, y conforme $|a|$ disminuye, la parábola se hace más ancha.

Ahora consideremos las tres funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = (x - 2)^2$ y $h(x) = (x + 2)^2$. Estas funciones se grafican en la **figura 8.14**. (Si lo desea, trace los puntos para verificar que éstas son las gráficas de las funciones).

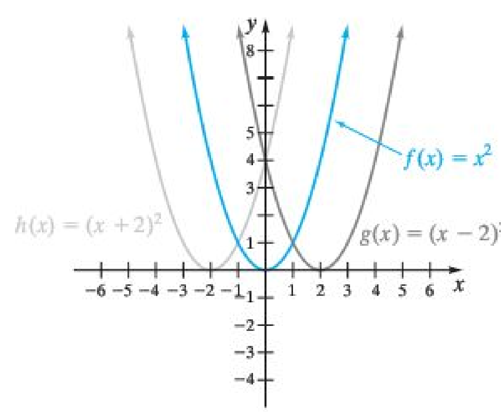


FIGURA 8.14

Observe que las gráficas de $g(x)$ y de $h(x)$ son idénticas a la gráfica de $f(x)$, salvo que $g(x)$ se ha trasladado, o desplazado, 2 unidades hacia la derecha, y $h(x)$ se ha trasladado 2 unidades hacia la izquierda. En general, la gráfica de $g(x) = a(x - h)^2$ tendrá la misma forma que la gráfica de $f(x) = ax^2$. La gráfica de una ecuación de la forma $g(x) = a(x - h)^2$ estará desplazada horizontalmente respecto de la gráfica de $f(x) = ax^2$. *Si h es un número real positivo, la gráfica de $g(x) = a(x - h)^2$ estará desplazada h unidades hacia la derecha respecto de la gráfica de $f(x) = ax^2$. Si h es un número real negativo, la gráfica de $g(x) = a(x - h)^2$ estará desplazada $|h|$ unidades hacia la izquierda respecto de la gráfica de $f(x) = ax^2$.*

Ahora considere las gráficas de $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 3$ y $h(x) = x^2 - 3$, ilustradas en la **figura 8.15**. Mediante el trazo de puntos, puede verificar que éstas son las gráficas de las tres funciones.

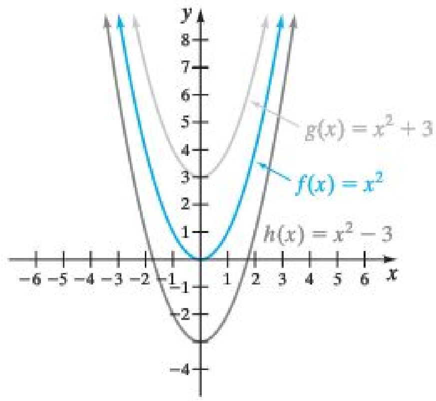


FIGURA 8.15

Observe que las gráficas de $g(x)$ y de $h(x)$ son idénticas a la gráfica de $f(x)$, salvo que $g(x)$ se ha trasladado 3 unidades hacia arriba y $h(x)$ se ha trasladado 3 unidades hacia abajo. En general, *si k es un número real positivo la gráfica de $g(x) = ax^2 + k$ es la gráfica de $f(x) = ax^2$ desplazada k unidades hacia arriba, y $|k|$ unidades hacia abajo si k es un número real negativo.*

Ahora considere las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x - 2)^2 + 3$, ilustradas en la **figura 8.16**.

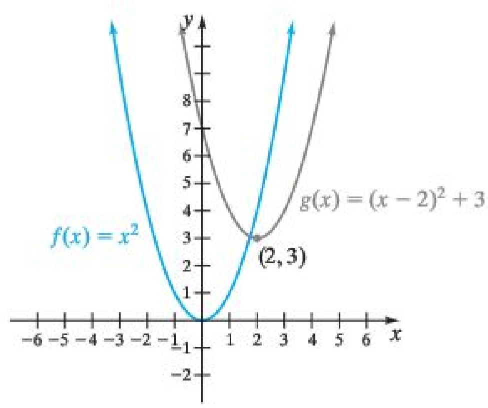


FIGURA 8.16

Observe que la gráfica de $g(x)$ tiene la misma forma general que la de $f(x)$. La gráfica de $g(x)$ es la gráfica de $f(x)$ trasladada 2 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba. Esta gráfica y el análisis anterior conducen a las importantes conclusiones siguientes.

Desplazamientos de parábolas

Para cualquier función $f(x) = ax^2$, la gráfica de $g(x) = a(x - h)^2 + k$ tendrá la misma forma que la gráfica de $f(x)$. La gráfica de $g(x)$ será la gráfica de $f(x)$, pero desplazada según las siguientes condiciones:

- Si h es un número real positivo, la gráfica se desplazará h unidades hacia la derecha.
- Si h es un número real negativo, la gráfica se desplazará $|h|$ unidades hacia la izquierda.
- Si k es un número real positivo, la gráfica se desplazará k unidades hacia arriba.
- Si k es un número real negativo, la gráfica se desplazará $|k|$ unidades hacia abajo.

Examine la gráfica de $g(x) = (x - 2)^2 + 3$ en la **figura 8.16**. Observe que su eje de simetría está en $x = 2$ y su vértice se da en $(2, 3)$.

Eje de simetría y vértice de una parábola

La gráfica de cualquier función de la forma

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

será una parábola con eje de simetría en $x = h$ y vértice en (h, k).

Ejemplo	Eje de simetría	Vértice	La parábola abre hacia
$f(x) = 2(x - 5)^2 + 7$	$x = 5$	$(5, 7)$	arriba, $a > 0$
$f(x) = -\frac{1}{2}(x - 6)^2 - 3$	$x = 6$	$(6, -3)$	abajo, $a < 0$

Ahora considere $f(x) = 2(x + 5)^2 + 3$. Podemos reescribir esta función como $f(x) = 2[x - (-5)]^2 + 3$; por lo tanto, h tiene un valor de -5 y k tiene un valor de 3. La gráfica de esta función tiene su eje de simetría en $x = -5$ y su vértice en $(-5, 3)$.

Ejemplo	Eje de simetría	Vértice	La parábola abre hacia
$f(x) = 3(x + 4)^2 - 2$	$x = -4$	$(-4, -2)$	arriba, $a > 0$
$f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{4}$	$x = -\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$	abajo, $a < 0$

Ahora estamos preparados para graficar parábolas utilizando las traslaciones.

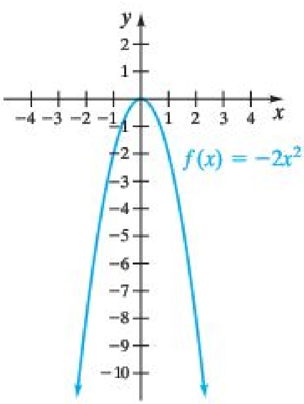


FIGURA 8.17

EJEMPLO 6 La gráfica de $f(x) = -2x^2$ se ilustra en la **figura 8.17**. Tomándola como guía, grafique $g(x) = -2(x + 3)^2 - 4$.

Solución La función $g(x)$ puede escribirse como $g(x) = -2[x - (-3)]^2 - 4$. Por lo tanto, en la función, h tiene un valor de -3 y k un valor de -4. Así, la gráfica de $g(x)$ será la gráfica de $f(x)$ desplazada 3 unidades hacia la izquierda (ya que $h = -3$) y 4 unidades hacia abajo (ya que $k = -4$). Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se ilustran en la **figura 8.18**.

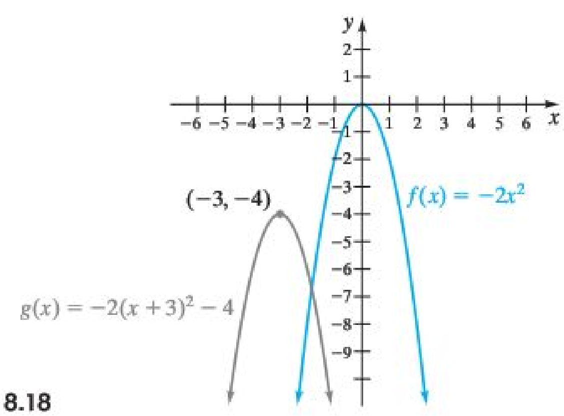


FIGURA 8.18

Ahora resuelva el ejercicio 49

En la parte 2 de esta sección iniciamos con una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, y completamos el cuadrado para obtener

$$f(x) = a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Además, se mencionó que el vértice de la parábola de esta función es $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$. Suponga que en la función sustituimos h por $-\frac{b}{2a}$ y k por $\frac{4ac - b^2}{4a}$. Entonces obtenemos

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

que sabemos da por resultado una parábola con vértice en (h, k). Por lo tanto, las dos funciones $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $f(x) = a(x - h)^2 + k$ tienen el mismo vértice y el mismo eje de simetría para cualesquiera funciones dadas.

6 Escribir funciones en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$

Si queremos graficar parábolas utilizando desplazamientos, necesitamos cambiar la forma de la función de $f(x) = ax^2 + bx + c$ a $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Para hacerlo, *completamos el cuadrado* como se estudió en la sección 8.1. Al completar el cuadrado obtenemos un trinomio cuadrado perfecto, que puede representarse como el cuadrado de un binomio. En los ejemplos 7 y 8 se explica el procedimiento, mismo que usaremos nuevamente en un capítulo posterior, cuando analicemos las secciones cónicas.

EJEMPLO 7 ▸ Dada $f(x) = x^2 - 6x + 10$,

a) Escriba $f(x)$ en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.
b) Grafique $f(x)$.

Solución

a) Utilizamos los términos x^2 y $-6x$ para obtener un trinomio cuadrado perfecto.

$$f(x) = (x^2 - 6x) + 10$$

Ahora tomamos la mitad del coeficiente del término en x y lo elevamos al cuadrado.

$$\left[\frac{1}{2}(-6)\right]^2 = \boxed{9}$$

Luego sumamos este valor, 9, dentro de los paréntesis. Como sumamos 9 dentro del paréntesis, sumamos -9 fuera de los paréntesis. Sumar 9 y -9 a una expresión es como si sumáramos 0, ya que su valor no cambia.

$$f(x) = (x^2 - 6x \boxed{+ 9}) \boxed{- 9} + 10$$

Al hacer esto hemos creado un trinomio cuadrado perfecto dentro de los paréntesis más una constante fuera de los paréntesis. Expresamos el trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio.

$$f(x) = (x - 3)^2 + 1$$

Ahora la función está en la forma que buscábamos.

b) Como $a = 1$ es mayor que 0, la parábola abre hacia arriba. El eje de simetría de la parábola está en $x = 3$, y su vértices se da en $(3, 1)$. La intersección con el eje y puede obtenerse con facilidad sustituyendo $x = 0$ y determinando el valor de $f(x)$. Cuando $x = 0$, $f(x) = (-3)^2 + 1 = 10$. Por lo tanto, la intersección con el eje y se da en 10. Trazando el vértice, la intersección con el eje y y unos cuantos puntos más, obtenemos la gráfica de la **figura 8.19**. Para compararlas, la figura también muestra la gráfica de $y = x^2$.

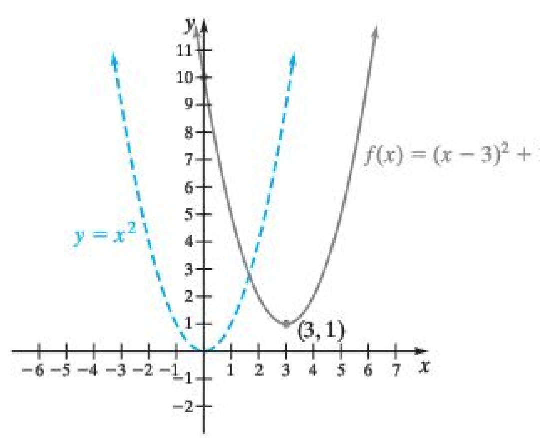


FIGURA 8.19

▸ Ahora resuelva el ejercicio 59

EJEMPLO 8 ▸ Dada $f(x) = -2x^2 - 10x - 13$,

a) Escriba $f(x)$ en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.
b) Grafique $f(x)$.

Solución

a) Cuando el coeficiente principal no es 1, lo factorizamos de los términos que incluyen a la variable.

$$f(x) = -2(x^2 + 5x) - 13$$

Luego completamos el cuadrado

La mitad del coeficiente del término de x al cuadrado

$$\left[\frac{1}{2}(5)\right]^2 = \boxed{\frac{25}{4}}$$

Si sumamos $\frac{25}{4}$ dentro de los paréntesis, en realidad sumamos $-2\left(\frac{25}{4}\right)$ o $-\frac{25}{2}$, ya que cada término dentro de los paréntesis se multiplica por -2. Por lo tanto, para $\frac{25}{2}$ fuera de los paréntesis.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\left(x^2 + 5x + \boxed{\frac{25}{4}}\right) \boxed{+\frac{25}{2}} - 13 \\ &= -2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Como $a = -2$, la parábola abre hacia abajo. El eje de simetría está en $x = -\frac{5}{2}$ y el vértice se da en $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. La intersección con el eje y está en $f(0) = -13$. Trazamos unos cuantos puntos y dibujamos la gráfica en la **figura 8.20**. Para comparar, en la figura, también se ilustra la gráfica de $y = -2x^2$.

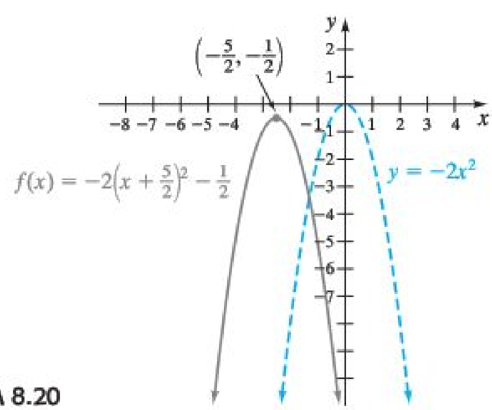


FIGURA 8.20

Observe que $f(x) = -2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ no tiene intersecciones con el eje x. Por lo tanto, no hay valores reales de x para los que $f(x) = 0$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 63**

Una segunda manera de cambiar la ecuación de $f(x) = ax^2 + bx + c$ a la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$ es hacer $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Después, se determinan los valores para h y k, y luego se sustituyen los valores obtenidos en $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Por ejemplo, para la función $f(x) = -2x^2 - 10x - 13$ del ejemplo 8, $a = -2$, $b = -10$ y $c = -13$; entonces

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-10}{2(-2)} = -\frac{5}{2}$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-2)(-13) - (-10)^2}{4(-2)} = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - h)^2 + k \\ &= -2\left[x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right]^2 - \frac{1}{2} \\ &= -2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Esta respuesta coincide con la que se obtuvo en el ejemplo 8.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.5

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Cómo se denomina la gráfica de una ecuación cuadrática?
2. ¿Cuál es el vértice de una parábola?
3. ¿Qué es el eje de simetría de una parábola?
4. ¿Cuál es la ecuación para determinar el eje de simetría de la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$?
5. ¿Cuál es el vértice de la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$?
6. ¿Cuántas intersecciones con el eje x tiene una función cuadrática si el discriminante es **a)** < 0, **b)** $= 0$, **c)** > 0?
7. ¿La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tendrá un máximo o un mínimo si **a)** $a > 0$, **b)** $a < 0$? Explique.
8. Explique cómo determinar las intersecciones con el eje x de la gráfica de una función cuadrática.
9. Explique cómo determinar las intersecciones con el eje y de la gráfica de una función cuadrática.
10. Considere la gráfica de $f(x) = ax^2$. Explique cómo cambia la forma de $f(x)$ conforme $|a|$ aumenta y conforme $|a|$ disminuye.
11. Considere la gráfica de $f(x) = ax^2$. ¿Cuál es la forma general de $f(x)$, si **a)** $a > 0$, **b)** $a < 0$?
12. Las gráficas de $f(x) = ax^2$ y de $g(x) = -ax^2$, ¿tienen el mismo vértice para cualquier número real, a, distinto de cero? Explique.
13. ¿La función $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ tiene un valor máximo o mínimo? Explique.
14. ¿La función $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 7$ tiene un valor máximo o mínimo? Explique.

Práctica de habilidades

En cada caso, determine: **a)** *si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo;* **b)** *la intersección con el eje y;* **c)** *el vértice;* **d)** *las intersecciones con el eje x (si las hay), y* **e)** *dibuje la gráfica.*

15. $f(x) = x^2 + 8x + 15$
16. $g(x) = x^2 + 2x - 3$
17. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
18. $h(x) = x^2 - 2x - 8$
19. $f(x) = -x^2 - 2x + 8$
20. $p(x) = -x^2 + 8x - 15$
21. $g(x) = -x^2 + 4x + 5$
22. $n(x) = -x^2 - 2x + 24$
23. $t(x) = -x^2 + 4x - 5$